Richiamo:

Una rappresentazione è un set di generatori $\{H_i, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ che rispettano la stessa tavola di prodotti di Lie dell'algebra che rappresentano

$$a, b, c \in \text{Algebra} \qquad [a, b] = c$$

$$\Downarrow \text{implica}$$

$[A, B] = C$ se A, B, C sono parte della rappresentazione dell'algebra

a h_i	facciamo	corrispondere	generatori		H_i
e_α	"	"	"		E_α
$e_{-\alpha}$	"	"	"		$E_{-\alpha}$

E, H agiscono su uno spazio vettoriale V a cui appartengono dei vettori ϕ tra cui diamo autovettori ϕ^M t.c.

$$H\phi_M = M(h)\,\phi_M$$

$M \in H_0^*$ è il peso e ϕ_M il vettore peso.

Sui pesi è stata trovata la formula di base

$$m_\alpha - p_\alpha = \frac{2\langle M,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

dove M è un peso in una sequenza di pesi in cui α può essere aumentato p volte e ridotto m volte

Se ci restringiamo a $\alpha_i \in \Pi_\sigma^+$ e chiamo Λ il peso più alto nella sequenza di posso α_i sono in grado di dire che

$$2\frac{\langle\Lambda\ \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i\ \alpha_i\rangle} = m \geq 0$$

Questo vale per ciascun α_i quindi posso parlare di

$$\Lambda_i \equiv m_i = 2\frac{\langle \Lambda , \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i \, \alpha_i \rangle}$$

che è un vettore n-dim se ho n radici semplici

Per SU(3) abbiamo visto $\{\alpha_1, -\alpha_2\}$ sono semplici e

quindi (n_1, n_2) identifica gli indici di Dynkin

necessari a identificare univocamente una rappresentazione

tramite la sua sequenza di pesi possibili

L'identificazione è univoca perché da ciascun peso massimo

posso determinare tutti i pesi inferiori sottraendo un certo

numero di volte le opportune radici α_i

Questa osservazione infatti fornisce un metodo per determinare

tutti i pesi di una rappresentazione di pesi massimi Λ_i

Il ragionamento è sempre analogo a quello visto per m-p nel cercare le radici. Dato M mi domando se $M-\alpha_i$ è un peso ammissibile oppure no

$$m_i = 2\frac{\langle M, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i ; \alpha_i\rangle} \quad \text{deve essere strettamente positivo}$$

Uno vettore che porta al peso $M-\alpha_i$ significa che viene sottratto una radice α_i e quindi avrà indice di Dynkin ottenuto sottraendo α_i

Per SU(3) prendiamo rapp = $(1 \ 0)$

$$A_{\text{Cartan}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \end{array}$$

$$M = 1 \quad 0 \qquad \text{peso più alto di questa}$$

rappresentazione

$$m_1 > 0 \qquad m_2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{sottraggo } \alpha_1}$$

$$M - \alpha_1 = -1 \quad 1$$ peso neutro

$$m_1 = 0 \qquad m_2 = 1 \quad \xrightarrow{\text{sottraggo } \alpha_2}$$

$$M - \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad -1$$ peso più basso

Utilizzando $A^{-1}_{cartan} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ posso scrivere il peso più alto associato alla rapp $(1,0)$

$$M(\Lambda = (1\,0)) = \vec{\alpha}\, \underbrace{A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}} = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$$

$$M - \sigma_1 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$$

$$M - \sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2$$

Si può ripetere l'esercizio per rap = $(0\ 1), (1\ 1), (2\ 0)$

M

$$\begin{tikzcd}
& (1\ \ 1) \arrow[dl, "-\alpha_2"'] \arrow[dr, "-\alpha_1"] & \\
(2\ -1) \arrow[dr, "-\alpha_1"'] & & (-1\ \ 2) \arrow[dl, "-\alpha_2"] \\
& (0\ \ 0) \arrow[dl, "-\alpha_1"'] \arrow[dr, "-\alpha_2"] & \\
(1\ -2) \arrow[dr, "-\alpha_2"'] & & (-2\ \ 1) \arrow[dl, "-\alpha_1"] \\
& (-1\ -1) &
\end{tikzcd}$$

$m_1 = p_1 + v_1 = 2$ $\quad M \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad m_2 = p_2 + v_2 = 0$

$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0$

$\Big| -\alpha_1$

$m_1 = p_1 + v_1 = 1$ $\quad M-\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$p_1 = 1$

$m_2 = p_2 + v_2 = 1$

$p_2 = 0$

$-\alpha_1 \qquad -\alpha_2$

$M-2\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad M-\alpha_1-\alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

$m_2 = 2$ $\qquad m_1 = v_1 = 1$

$-\alpha_2 \qquad -\alpha_1$

$M-\alpha_2-2\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$

$m_1 = p_1 + v_1 = 0$

$p_1 = 1 \quad v_1 = -1$

$\Big| -\alpha_2$

$m_2 = p_2 + 0 = 1$

$p_2 = 1$ perchè $M-2\alpha_1$ è un peso

$M-2\alpha_1-2\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$